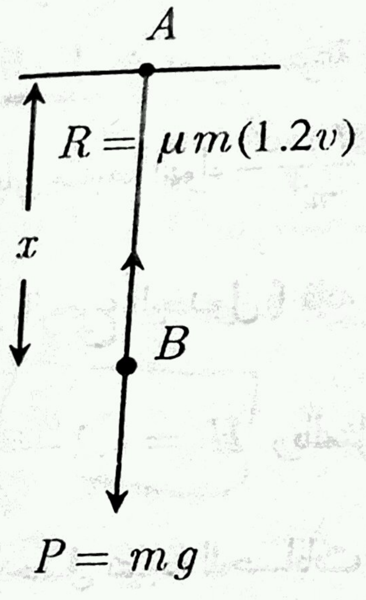
ب) عند القفز بالمظلة المفتوحة $v_{\lim} \approx 5\ m/sec$

$$H_1 \approx 3\ m,\ H_2 \approx 5\ m \quad \square$$

مثال ٦ : سقط جسم كتلته m تحت تأثير وزنه إلى أسفل في وسط مقاوم تتناسب قوة مقاومته مع السرعة ، إدرس حركته .

الحل : بدأ الجسم حركته من السكون $v_0 = 0$ تحت تأثير وزنه من النقطة A فإذا تحرك مسافة قدرها x ليصل إلى النقطة B وكانت القوة الناتجة عن مقاومة الوسط R تتناسب مع $1.2\ v$ فإن :

$$R = \mu m(1.2v)$$



حيث μ ثابت التناسب .

وتكون معادلة الحركة كما يلي :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \mu m(1.2v)$$

$$\therefore\ \frac{dv}{dt} = g - 1.2\mu v$$

من الطرف الأيمن نلاحظ أنه يتناقص

بزيادة السرعة إلى الحد الذي يؤدي إلى عند إنعدام العجلة فإن السرعة حينئذ تسمى السرعة القصوى v_1 بحيث :

$$v_1 = \frac{g}{1.2\mu}$$

وبهذا فإن المعادلة (9.1) تصبح على الصورة

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{v_1}(v_1 - v)$$

وبفصل المتغيرات والتكامل

ثوابت

$$\int \frac{dv}{v_1 - v} = \frac{g}{v_1}\int dt$$

$$\therefore\ -\ln|v_1 - v| = \frac{g}{v_1}t + C_1$$

حيث C_1 ثابت التكامل يتعين بالشرط الإبتدائي عندما $t = 0$ فإن $v = 0$ وبهذا يكون $C_1 = -\ln v_1$ وبهذا تكون معادلة الحركة كما يلي :

$$\frac{v_1 - v}{v_1} = e^{-\frac{g}{v_1}t}$$

أو

$$v = v_1\left(1 - e^{-\frac{g}{v_1}t}\right) \qquad (10.1)$$

المعادلة (10.1) تعطينا السرعة عند أي لحظة .

لاحظ أن المعادلة السابقة تعني أن الجسم يصل إلى السرعة النهائية عندما $t \to \infty$ وبهذا عملياً فإن الجسم لا يمكن أن يصل إلى سرعته القصوى.

المعادلة (10.1) يمكن أن تكتب على الصورة

$$\frac{dx}{dt} = v_1\left(1 - e^{-\frac{g}{v_1}t}\right)$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على المعادلة

$$x = v_1\left(t + \frac{v_1}{g}e^{-\frac{g}{v_1}t}\right) + C_2$$

حيث C_2 هي ثابت التكامل ويتعين من الشرط الإبتدائي عندما $t = 0$ فإن $x = 0$ ومنها $C_2 = -\frac{v_1^2}{g}$ وتكون الصورة النهائية لمعادلة الحركة التي تعين المسافة عند أي لحظة على الصورة:

$$x = v_1\left(t + \frac{v_1}{g}(e^{-\frac{g}{v_1}t} - 1)\right)$$

تمرين

إدرس حركة جسم كتلته m يسقط من السكون في وسط مقاوم تتناسب قوة مقاومته مع نصف مربع السرعة التي يكتسبها الجسم أثناء حركته.

وبهذا تكون معادلة الحركة كما يلي :

$$x = l\cos(\omega t - \cos^{-1}\tfrac{b}{l})$$

وبوضع $\alpha = -\cos^{-1}\frac{b}{l}$ فإن معادلة الحركة التوافقية البسيطة في هذه الحالة تصبح :

$$x = l\cos(\omega t + \alpha) \qquad (10.2)$$

وتسمي α زاوية الطور (Phase angle).

مثال ١ : نقطة مادية تتحرك حركة توافقية بسيطة سرعتها عند مركز الجذب $6\,ft/sec$ وعجلتها وهي تبعد قدمين عن المركز تساوي $8\,ft/sec^2$. أوجد سعة الذبذبة وزمنها.

الحل : من معادلة السرعة للحركة التوافقية البسيطة

$$v^2 = \omega^2(l^2 - x^2)$$

فإن

(11.2)

كذلك من معادلة العجلة فإن

$$a = \omega^2 x$$

وبالتالي فإن

$$8 = 2\omega^2$$

$$\therefore \omega = 2 \qquad (12.2)$$

بالتعويض بالمعادلة (12.2) في المعادلة (11.2) نحصل على أن السعة

$$l = 3\ ft$$

والزمن الدوري

$$T_{period} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ sec.$$

مثال ٢ : تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بحيث أن إزاحتها في اللحظة t تعطى بالمعادلة

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

حيث A, B, ω ثوابت فأثبت أن حركة النقطة هي حركة توافقية بسيطة ثم إذا كانت $A = 3$ ، $B = 4$ ، $\omega = 2$ فأوجد زمن الذبذبة والسعة وأكبر قيمة لكل من السرعة والعجلة .

الحل: بتفاضل المعادلة المعطاة مرتين بالنسبة للزمن نحصل على

$$\therefore a^2+ab+b^2>3ab$$

أي أن

$$\frac{a^2+ab+b^2}{ab}>3 \qquad (29.4)$$

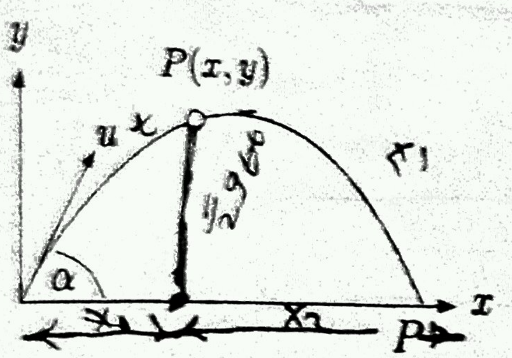
ومن المعادلتين (29.4) ، (27.4) يتضح أن :

$$\tan\alpha>3 \quad \square$$

مثال ٢ : إذا علم أن الزمن الذي يأخذه مقذوف من لحظة قذفه حتى يصل إلى نقطة P على المسار هو t وأن الزمن الذي يأخذه من P حتى يصل إلى الأفقي المار بنقطة القذف هو t' . اثبت أن ارتفاع P عن الأفقي يساوي $\frac{1}{2}gtt'$. وإذا كان X_1 هو البعد الأفقي لنقطة P عن نقطة القذف ، X_2 هو البعد الأفقي بين P ونقطة الإصطدام مع الأفقي المار بنقطة القذف . فاثبت أن ارتفاع P هو $\frac{X_1X_2}{X_1+X_2}\tan\alpha$ حيث α زاوية القذف .

الحل : نفرض أن المقذوف قذف بسرعة u وفي اتجاه يصنع زاوية α مع الأفقي ، ونفرض أن احداثيات النقطة P هي (x,y) واحداثيات النقطة P' هي $(R,0)$ وبالتالي عند النقطة P يكون :

$$x = u\cos\alpha\, t \qquad (30.4)$$



$$y = u\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (31.4)$$

وعند النقطة P' يكون :

$$R = u\cos\alpha\,(t+t') \qquad (32.4)$$

$$0 = u\sin\alpha\,(t+t') - \frac{1}{2}g(t+t')^2 \qquad (33.4)$$

من المعادلة (33.4) نحصل على :

$$u\sin\alpha = \frac{g(t+t')}{2} \qquad (34.4)$$

وبالتعويض بالمعادلة (34.4) في (31.4) نحصل على

$$y = \frac{1}{2}gtt' \quad \square$$

وهذا هو ارتفاع النقطة P عن الأفقي .

وحيث أن X_1 هو البعد الأفقي للنقطة P عن نقطة القذف ، X_2 هو البعد الأفقي بين P وبين نقطة الإصطدام مع الأفقي P' فإن إحداثيات النقطة P تكون (X_1,Y_1) واحداثيات النقطة P' تكون $(X_1+X_2,0)$.

وحيث أن P, P' يقعان على المسار ، إذاً فهما يحققان معادلة المسار وبالتالي عند النقطة P يكون :

$$y = X_1 \tan\alpha - \frac{gX_1^2}{2u^2\cos^2\alpha} \tag{35.4}$$

وعند النقطة P' يكون :

$$X_1 + X_2 = \frac{2u^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \tag{36.4}$$

ومن المعادلة (36.4) نحصل على

$$2u^2 = \frac{g(X_1+X_2)}{\sin\alpha\cos\alpha} \tag{37.4}$$

وبالتعويض من (37.4) في (35.4) نحصل على :

$$y = \frac{X_1X_2}{X_1+X_2}\tan\alpha \qquad \square$$

وهذا هو ارتفاع النقطة P عن الأفقي .

$$\left.\begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - \frac{2M_2}{M_1+M_2}(v_{1x}-v_{2x}) \\ u_{1x} &= v_{2x} + \frac{2M_1}{M_1+M_2}(v_{1x}-v_{2x}) \end{aligned}\right| \quad (10.5)$$

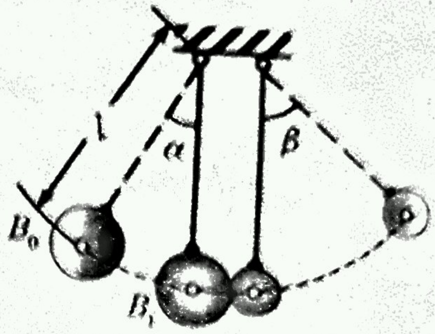
ويكون الدفع الصادم المؤثر على الجسم عند ذلك مساوياً :

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2M_1M_2}{M_1+M_2}(v_{1x}-v_{2x})$$

وكما نرى يساوي الدفع الصادم عند التصادم مطلق المرونة ضعف الدفع الصادم عند التصادم منعدم المرونة (مطلق المرونة) .

وكحالة خاصة وعندما يكون $M_1 = M_2$ نجد من المعادلات (10.5) أن $u_{1x} = v_{2x}$ ، $u_{2x} = v_{1x}$ وهكذا يتبادل الجسمان المتساويان في الكتلة ، سرعاتهما عند التصادم تصادماً مطلق المرونة .

مثال ٢ : كرتان كتلتاهما M_1, M_2 معلقتان كما هو مبين في الشكل ٥.٣ . وقد أزيحت الكرة الأولى حتى انحرفت عن الرأسي بزاوية α ثم تركت بدون سرعة ابتدائية . وبعد التصادم



شكل ٤.٥

انحرفت الكرة الثانية بزاوية β . عين معامل الإرتداد للكرتين عند تصادمهما .

الحل : يمكن من معطيات المسألة تعيين v_1 سرعة مركز الكرة الأولى في بداية التصادم ، u_2 سرعة مركز الكرة الثانية في نهاية التصادم . ومن نظرية التغير في طاقة الحركة الذي يحدث نتيجة الإزاحة B_0B_1 نجد للكرة الأولى أن :

$$\frac{1}{2}M_1v_1^2 = P_1h = M_1gl(1-\cos\alpha)$$

حيث l بعد مركز الكرة عن نقطة التعليق . ومن هنا ينتج أن :

$$v_1 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}$$

وبنفس الطريقة نحصل على

$$u_2 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\beta}{2}$$

وبما أن $v_2 = 0$ في حالتنا هذه ، فإن المعادلتين (5.5) ، (6.5) تعطيان :

$$M_1u_{1x} + M_2u_{2x} = M_1v_{1x}, \qquad u_{2x} - u_{1x} = kv_{1x}$$

وبحذف u_{1x} من هاتين المعادلتين ، مع ملاحظة أن $v_{1x} = v_1$ ، $u_{2x} = u_2$ نحصل على :

$$M_1v_1(1+k) = (M_1+M_2)u_2$$

ومن هنا نحصل أخيراً على :

$$k=\frac{(M_1+M_2)u_2}{M_1v_1}-1=\frac{(M_1+M_2)\sin\frac{\beta}{2}}{M_1\sin\frac{\alpha}{2}}-1 \quad \square$$

أمثلة محلولة

مثال ٣ : كرة كتلتها $7\ lb$ تتحرك بسرعة $10\ ft/sec$ تصطدم بكرة أخرى كتلتها $3.5\ lb$ متحركة بسرعة $6\ ft/sec$ في نفس الإتجاه . إذا كان معامل الإرتداد $k=0.5$ ، عين سرعات ما بعد التصادم .

الحل : نفرض أن سرعة الكرة $7\ lb$ بعد التصادم هي u_1 في حين تكون سرعة الكرة $3.5\ lb$ بعد التصادم تساوي u_2 .

من مبدأ ثبوت كمية الحركة الخطية المعادلة (5.5) :

$$7(10)+3.5(6)=10u_1+6u_2$$

$$\therefore 10u_1+6u_2=91 \qquad (11.5)$$

كذلك من المعادلة (7.5) فإن :

$$u_1-u_2=-8 \qquad (12.5)$$

بحل المعادلتين (11.5) ، (12.5) نحصل على :

$$\therefore u_1=\frac{43}{16}\ ft/sec, \quad u_2=\frac{171}{16}\ ft/sec \quad \square$$